Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Takmičenje iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Neka je ABC jednakokraki trougao takav da $|AC| = |BC|$. Upisani krug sa centrom u I dodiruje stranicu BC u tački D i stranicu AC u tački E. Tačka presjeka AD i BE je S. Tačka presjeka AD s upisanim krugom je $P(\neq D)$.

   a) Dokazati da su tačke C, I i S na istoj pravoj.

   b) Dokazati da tačke P, I, S i E leže na istom krugu.

   Rješenje:

   a) Kako su CE i CD tangente na upisani krug iz tačke C, tada važi $|CE| = |CD|$ pa kako je trougao ABC jednakokraki slijedi da je $|AE| = |BD|$ odakle, uz $|AB| = |AB|$ i $\angle EAB = \angle DBA$, slijedi podudarnost trouglova ABE i ABD. Zato je

   $$\angle SAB = \angle SBA,$$

   odnosno

   $$|SA| = |SB|.$$

   Trouglovi ASC i BSC su podudardni ($|AC| = |BC|, |SA| = |SB|, |SC| = |SC|$), pa je $\angle ACS = \angle BCS$. Odavde slijedi da S pripada simetrali ugla $\angle ACB$, odnosno pravoj određenoj sa tačkama C i I.

2. Dat je niz (a_n) za koji važi $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ za $n \geq 0$. Koje potpune kvadrate sadrži niz ako je $a_0 = 2019$.

Rješenje:

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + 2n + 1 &= a_{n-1} + (2(n-1)+1) + (2n+1) \\ &= a_{n-2} + (2(n-2)+1) + (2(n-1)+1) + (2n+1) \\ &= \ldots = a_0 + \underbrace{1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)}_{S} = 2019 + S, \end{aligned}$$

gdje je S zbir neparnih brojeva od 1 do $(2n+1)$, odnosno suma aritmetičkog niza, gdje je prvi član 1, razlika 2, a broj članova $n+1$. Pa je $S = \frac{(1+(2n+1))(n+1)}{2} = (n+1)^2$. Dakle

$$a_{n+1} = 2019 + (n+1)^2,$$

odnosno

$$a_n = 2019 + n^2.$$

Pretpostavimo da je $a_n = m^2$ za neki prirodan broj m.

Tada je $2019 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Kako je $2019 = 3 \cdot 673$ i $m+n > m-n$, to je:

- $m+n = 673$, $m-n = 3$, odakle se dobija $m = 338, n = 335$. Dakle $a_{335} = 338^2$.
- $m+n = 2019$, $m-n = 1$, odakle se dobija $m = 1010, n = 1009$. Dakle $a_{1009} = 1010^2$.

3. Neka su x i y realni brojevi takvi da $(x+1)(y+2) = 8$. Dokazati da je $(xy-10)^2 \geq 64$ i odrediti sve realne brojeve za koje važi jednakost.

Rješenje:

Primijetimo da je $(xy-10)^2 \geq 64$, ekvivalentno sa $|xy-10| \geq 8$. Dakle, treba dokazati da realni brojevi x, y zadovoljavaju jednu od nejednakosti $xy - 10 \geq 8$ ili $xy - 10 \leq -8$, odnosno $xy \geq 18$ ili $xy \leq 2$.

Neka je $u = x+1$, $v = y+2$. Tada je $uv = 8$. Kako je $x = u-1$ i $y = v-2$, to je $xy = (u-1)(v-2) = uv - v - 2u + 2 = -2u - v + 10$. Dakle, treba dokazati da je $-2u - v + 10 \geq 18$ ili $-2u - v + 10 \leq 2$, što je ekvivaletno sa $2u + v \leq -8$ ili $2u + v \geq 8$. Kako je $uv = 8$, razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $u, v > 0$, dokazaćemo da je $2u + v \geq 8$. Iz $v = \frac{8}{u}$ imamo

$$\begin{aligned} & 2u + \frac{8}{u} \geq 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 2u^2 - 8u + 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(u-2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

  što je očigledno tačno. Jednakost važi za $u = 2$ i $v = \frac{8}{2} = 4$, tj. $x = 1$, $y = 2$.

- Ako je $u, v < 0$, dokazaćemo da je $2u + v \leq -8$. Iz $v = \frac{8}{u}$ imamo

$$\begin{aligned} & 2u + \frac{8}{u} \leq -8 \\ \Leftrightarrow \quad & 2u^2 + 8u + 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(u+2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

  što je očigledno tačno. Jednakost važi za $u = -2$ i $v = \frac{8}{-2} = -4$, tj. $x = -3$, $y = -6$.

4. Neka je $\log_{4a}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(45)$. Dokazati da je a^3 cijeli broj i odrediti ga.

Rješenje:

Na osnovu definicije logaritma imamo da je $(4a)^{\log_{3a}(45)} = 40\sqrt{3}$. Kako je $(4a)^{\log_{3a}(45)} = (45)^{\log_{3a}(4a)}$, to je $40\sqrt{3} = (45)^{\log_{3a}(4a)}$. Posljednja jednakost je ekvivalentna sa

$$\log_{3a}(4a) = \log_{45}(40\sqrt{3}).$$

Dalje imamo:

$$\log_{45}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(3a \cdot \frac{4}{3}) = 1 + \log_{3a}\left(\frac{4}{3}\right),$$

odnosno

$$\log_{3a}\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{45}\left(\frac{40\sqrt{3}}{45}\right),$$

ili ekvivalentno:

$$\log_{\frac{4}{3}}(3a) = \log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45).$$

Na osnovu definicije logaritma dobijamo da je

$$a = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45)}}{3}.$$

Ostaje da se pokaže da je a^3 cio broj. Kako je

$$\frac{40\sqrt{3}}{45} = \frac{2^3\sqrt{3}}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

to je

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45)}}{27} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\log_{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}(45)}}{27} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\frac{2}{3}\log_{\frac{4}{3}}(45)}}{27} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}}(45)^2}}{27} \\ &= \frac{45^2}{27} = 75. \end{aligned}$$