Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Pokazati da ne postoje cijeli brojevi x i y tako da važi

$$3x^2 + y^2 = 777777.$$

Rješenje:

Kako su brojevi $3x^2$ i 777777 djeljivi sa 3 (zbir cifara je djeljiv sa 3) to je i broj y^2 djeljiv sa 3, odnosno y je djeljiv sa 3. Neka je $y = 3z$, tada nakon dijeljenja polazne jednačine sa 3, imamo:

$$x^2 + 3z^2 = 259259.$$

Kako je $3z^2$ djeljiv sa 3, a broj 259259 daje ostatak 2 pri djeljenju sa 3 (jer zbir cifara daje ostatak 2), to bi povlačilo da x^2 daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3. Medjutim to nije moguće. Naime:

- ako je $x = 3k$, tada je $x^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$, odnosno x^2 daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 3.
- ako je $x = 3k + 1$, tada je $x^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, odnosno x^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3.
- ako je $x = 3k+2$, tada je $x^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$, odnosno x^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b = 1$. Dokazati da je

$$2 < (a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) \leq \frac{9}{4}.$$

Kada važi jednakost?

Rješenje:

Primijetimo da je

$$(a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})=\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}.$$

Dalje, iz $b=1-a$ imamo:

$$\begin{aligned}\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab} &= \frac{(a^2-1)((1-a)^2-1)}{a(1-a)} \\ &= \frac{(a-1)(a+1)(1-2a+a^2-1)}{a(1-a)} \\ &= \frac{-(a+1)a(a-2)}{a} = -a^2+a+2.\end{aligned}$$

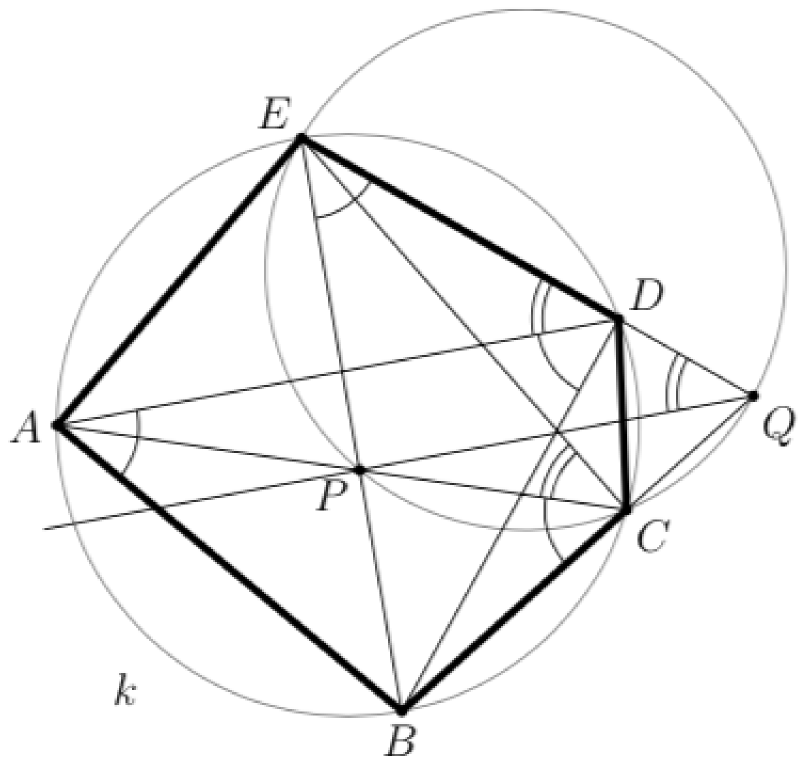
Dakle, treba dokazati

$$2 < -a^2+a+2 \leq \frac{9}{4}, \qquad \text{za } a \in (0,1).$$

Lijeva nejednakost je ekvivalentna sa $a^2-a<0$, tj. $a(a-1)<0$ što je očigledno tačno jer je $0<a<1$.

Desna nejednakost, poslije sređivanja, je ekvivalentna sa $4a^2-4a+1\geq 0$, tj. $(2a-1)^2\geq 0$, što je uvijek tačno. Jednakost se dostiže za $a=\frac{1}{2}$, pa je i $b=\frac{1}{2}$.

3. Oko konveksnog petougla $ABCDE$ takvog da je $|AB|=|BD|$ je opisan krug. Tačka P je presjek dijagonala AC i BE. Prave određene dužima BC i DE se sijeku u tački Q. Dokazati da je prava PQ paralelna s dijagonalom AD.



Slika 1

Rješenje:

Slika 1 prikazuje mogući raspored tačaka. Trougao ABD je jednakokraki sa osnovicom AD. Zbog toga možemo iskoristiti jednakost periferijskih uglova:

$$\angle BED = \angle BAD = \angle ADB = \angle ACB.$$

Odavde slijedi

$$\angle QCP = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle PEQ.$$

Dakle, četvorougao $PCQE$ je tetivni pa oko njega možemo opisati krug (Slika 1). Na osnovu jednakosti periferijskih uglova slijedi

$$\angle EDA = \angle ECA = \angle ECP = \angle EQP.$$

Kako PQ i AD s pravom EQ grade isti (orijentisani) ugao, prave PQ i AD su međusobno paralelne.

4. Odrediti sve kompleksne brojeve z za koje važi

$$z^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}.$$

Rješenje:
Neka je $z = x + iy$. Tada je:

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 &= \frac{1}{x+iy} + \frac{1}{x-iy} \\
\Leftrightarrow (x^2-y^2) + 2ixy &= \frac{x+iy+x-iy}{(x+iy)(x-iy)} \\
\Leftrightarrow (x^2-y^2) + 2ixy &= \frac{2x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Kako je desna strana realan broj to je $2xy = 0$ i $x^2 - y^2 = \frac{2x}{x^2+y^2}$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $y = 0$ tada je $x^2 = \frac{2x}{x^2}$, pa je $x = \sqrt[3]{2}$, tj. $z = \sqrt[3]{2} + i \cdot 0 = \sqrt[3]{2}$ je jedno rješenje.
- Ako je $x = 0$ tada je $y^2 = 0$, tj. $y = 0$. Ali tada je $z = 0$, što očigledno nije rješenje naše polazne jednačine.

Dakle, jedino rješenje je $z = \sqrt[3]{2}$.