Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2019

Takmičenje iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Neka je ABC jednakokraki trougao takav da $|AC| = |BC|$. Upisani krug sa centrom u I dodiruje stranicu BC u tački D i stranicu AC u tački E. Tačka presjeka AD i BE je S. Tačka presjeka AD s upisanim krugom je $P(\neq D)$.

   a) Dokazati da su tačke C, I i S na istoj pravoj.

   b) Dokazati da tačke P, I, S i E leže na istom krugu.

   Rješenje:

   a) Kako su CE i CD tangente na upisani krug iz tačke C, tada važi $|CE| = |CD|$ pa kako je trougao ABC jednakokraki slijedi da je $|AE| = |BD|$ odakle, uz $|AB| = |AB|$ i $\angle EAB = \angle DBA$, slijedi podudarnost trouglova ABE i ABD. Zato je

$$\angle SAB = \angle SBA,$$

   odnosno

$$|SA| = |SB|.$$

   Trouglovi ASC i BSC su podudardni ($|AC| = |BC|, |SA| = |SB|, |SC| = |SC|$), pa je $\angle ACS = \angle BCS$. Odavde slijedi da S pripada simetrali ugla $\angle ACB$, odnosno pravoj određenoj sa tačkama C i I.

   b) Kako je I centar upisanog kruga tada važi

$$\angle IPS = \angle IDS. \tag{1}$$

   Analogno se dobija da je

$$\angle IED = \angle IDE. \tag{2}$$

Iz podudarnosti trouglova SCE i SCD ($|SC| = |SC|$, $|CE| = |CD|$, $\angle ECS = \angle DCS$ jer su C, I, S kolinearne tačke na osnovu a)), slijedi da je $|SE| = |SD|$, odnosno $\angle DES = \angle EDS$. Odavde i iz (2) slijedi da je $\angle IES = \angle IDS$. Odavde i iz (1), vidimo da je

$$\angle IPS = \angle IES$$

tj. važi i b).

2. Međunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poređati za okruglim stolom tako da između svake dvojice učesnika, koji predstavljaju istu zemlju, sjedi tačno 9 drugih učesnika konferencije.

Rješenje:

Pretpostavimo da je opisani raspored sjedenja moguć. Numerišimo ljude redom sa $1, 2, \ldots, 54$. Neka su x_k, y_k, gdje je $x_k < y_k$, redni brojevi zemljaka, $k = \overline{1, 27}$.
Za svako k važi $y_k - x_k = 10$ ili $y_k - x_k = 44$. Neka je $x = x_1 + \ldots + x_{27}$, $y = y_1 + \ldots y_{27}$. Tada je

$$y - x = 10m + 44n, \tag{1}$$

za neke prirodne brojeve m, n. Takođe

$$y + x = 1 + \ldots + 54 = 27 \cdot 55. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) zaključujemo da je

$$2y = 10m + 44n + 27 \cdot 55,$$

što nije moguće jer je $27 \cdot 55$ neparan broj. Kontradikcija.

3. Neka su x i y realni brojevi takvi da $(x + 1)(y + 2) = 8$. Dokazati da je $(xy - 10)^2 \geq 64$ i odrediti sve realne brojeve za koje važi jednakost.

Rješenje:

Primijetimo da je $(xy - 10)^2 \geq 64$, ekvivalentno sa $|xy - 10| \geq 8$. Dakle, treba dokazati da realni brojevi x, y zadovoljavaju jednu od nejednakosti $xy - 10 \geq 8$ ili $xy - 10 \leq -8$, odnosno $xy \geq 18$ ili $xy \leq 2$.

Neka je $u = x + 1$, $v = y + 2$. Tada je $uv = 8$. Kako je $x = u - 1$ i $y = v - 2$, to je $xy = (u - 1)(v - 2) = uv - v - 2u + 2 = -2u - v + 10$. Dakle, treba dokazati da je

$-2u-v+10 \geq 18$ ili $-2u-v+10 \leq 2$, što je ekvivaletno sa $2u+v \leq -8$ ili $2u+v \geq 8$. Kako je $uv = 8$, razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $u, v > 0$, dokazaćemo da je $2u + v \geq 8$. Iz $v = \frac{8}{u}$ imamo

$$\begin{aligned} & 2u + \frac{8}{u} \geq 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 2u^2 - 8u + 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(u-2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

  što je očigledno tačno. Jednakost važi za $u = 2$ i $v = \frac{8}{2} = 4$, tj. $x = 1$, $y = 2$.

- Ako je $u, v < 0$, dokazaćemo da je $2u + v \leq -8$. Iz $v = \frac{8}{u}$ imamo

$$\begin{aligned} & 2u + \frac{8}{u} \leq -8 \\ \Leftrightarrow \quad & 2u^2 + 8u + 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(u+2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

  što je očigledno tačno. Jednakost važi za $u = -2$ i $v = \frac{8}{-2} = -4$, tj. $x = -3$, $y = -6$.

4. Neka je $\log_{4a}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(45)$. Dokazati da je a^3 cijeli broj i odrediti ga.

Rješenje:

Na osnovu definicije logaritma imamo da je $(4a)^{\log_{3a}(45)} = 40\sqrt{3}$. Kako je $(4a)^{\log_{3a}(45)} = (45)^{\log_{3a}(4a)}$, to je $40\sqrt{3} = (45)^{\log_{3a}(4a)}$. Posljednja jednakost je ekvivalentna sa

$$\log_{3a}(4a) = \log_{45}(40\sqrt{3}).$$

Dalje imamo:

$$\log_{45}(40\sqrt{3}) = \log_{3a}(3a \cdot \frac{4}{3}) = 1 + \log_{3a}\left(\frac{4}{3}\right),$$

odnosno

$$\log_{3a}\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{45}\left(\frac{40\sqrt{3}}{45}\right),$$

ili ekvivalentno:

$$\log_{\frac{4}{3}}(3a) = \log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45).$$

Na osnovu definicije logaritma dobijamo da je

$$a = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45)}}{3}.$$

Ostaje da se pokaže da je a^3 cio broj. Kako je

$$\frac{40\sqrt{3}}{45} = \frac{2^3\sqrt{3}}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

to je

$$\begin{aligned}
a^3 &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\log_{\frac{40\sqrt{3}}{45}}(45)}}{27} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\log_{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}(45)}}{27} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3\frac{2}{3}\log_{\frac{4}{3}}(45)}}{27} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}}(45)^2}}{27} \\
&= \frac{45^2}{27} = 75.
\end{aligned}$$